

Вселенная не имела бы смысла без математики

Математика – это язык Вселенной

Математика и космос

- Немыслимо освоение космоса без тончайших математических расчетов: скоростей, времени стыковки кораблей, траектории движения.



Для точности расчетов, используемых в межпланетной навигации, НАСА применяет число π (пи) равное 3.141592653589793.

В 2019 году это число вычислили с точностью до 31,4 трлн знаков после запятой.

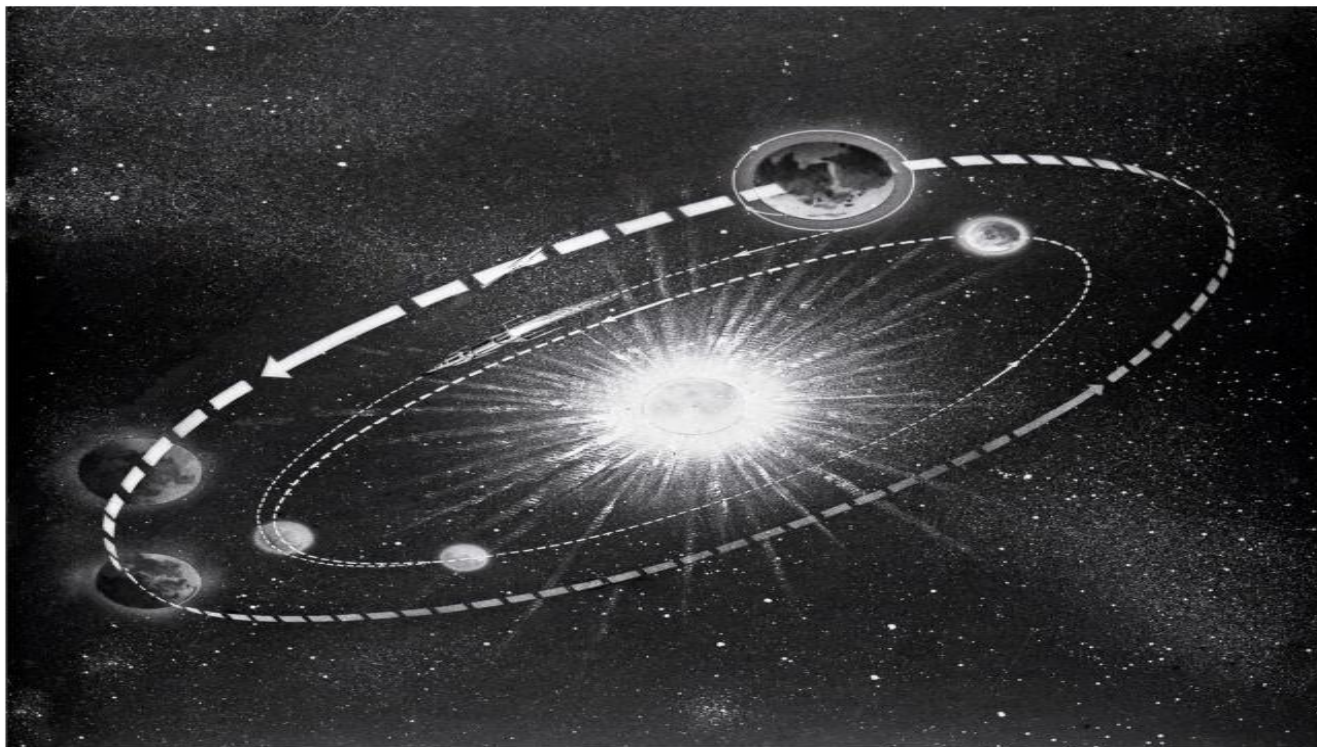


Схема полета космического аппарата "Венера-1" к планете Венера.

Миссия «Венера-1» отправилась к поверхности Венеры, но - промахнулась. Из-за потери связи зонд не смог скорректировать курс и пролетел в 1961 году мимо планеты в 100 000 км - в космических масштабах это не так уж и далеко.

Промех произошёл из-за того, что ученые в расчетах приняли число π с точностью 15 знаков после запятой. И лишь когда приняли 17 знаков следующий зонд благополучно был захвачен гравитацией Венеры.

Ученые-математики для себя сделали выводы о точности вычислений, когда имеешь дело с огромными расстояниями (млн. км) и космическими скоростями тел солнечной системы (около 30 км/с).

Это на Марс можно отправить марсоход, чтобы он там работал годами. На Венере время жизни любого аппарата исчисляется минутами. Если есть в Солнечной системе настоящий ад, то это как раз она - загадочная Венера.



Правило Тiциуса — Бóде

(называемое также **законом Бóде**) представляет собой эмпирическую формулу, приблизительно описывающую расстояния между планетами Солнечной системы и Солнцем (средние радиусы орбит). Эта закономерность была обнаружена Иоганном Тициусом в 1766 году и получила известность благодаря работам Иоганна Боде в 1772 году.

Своеобразной предысторией начала изучения пояса астероидов можно считать открытие зависимости, приблизительно описывающей расстояния планет от Солнца, получившей название правила Тициуса — Боде:

$$a_n = (0,4 + 0,3 \cdot 2^{n-1})$$

где **n** — порядковый номер планеты.
Впервые оно было сформулировано и опубликовано немецким физиком и математиком

Иоганном Тициусом в 1766 году.

Когда в 1766 году Тициус впервые строго сформулировал это правило, ему удовлетворяли все известные в то время планеты (от Меркурия до Сатурна), имелся лишь пропуск на месте **пятой планеты**.

Новый закон не привлёк большого внимания до тех пор, пока в **1781 году** не был открыт **Уран**, который почти точно лёг на предсказанную последовательность. После этого Боде призвал начать поиски недостающей планеты между Марсом и Юпитером. Именно в том месте, где должна была располагаться эта планета, была обнаружена **Церера**. Это вызвало рост доверия к правилу Тициуса — Боде среди астрономов, которое сохранялось до открытия Нептуна. Когда выяснилось, что, кроме Цереры, примерно на том же расстоянии от Солнца находится множество тел, формирующих **пояс астероидов**, была выдвинута гипотеза, что они образовались в результате разрушения планеты (**Фаэтона**), которая раньше находилась на этой орбите.

Правило Тіциуса — Бóде

Планета	Расстояние (а.е.)	Закон Бодe	
		Погрешность	Расстояние
Меркурий	0,387	0,400	3,4%
Венера	0,723	0,700	3,2%
Земля	1,000	1,000	
Марс	1,524	1,600	5.0%
Астероиды	2,794	2,800	
Юпитер	5,203	5,200	
Сатурн	9,539	10,000	4,8%
Уран	19,182	19,600	2,1%
Нептун	30,058	38,800	36,3%
Плутон	39,400	77,200	95,9%

Планеты Солнечной системы



Траектории и Геометрия

Расчёт траектории космического аппарата — это еще одна задача, где не обойтись без интегралов. Траектории в космосе нелинейные и зависят от множества факторов, включая гравитационные взаимодействия с другими телами. Тут также на помощь приходит геометрия, которая является неотъемлемой частью математического анализа. Без понимания геометрических законов движения тел в пространстве невозможно решить множество задач, связанных с космосом.



КОСМИЧЕСКИЕ СКОРОСТИ

ПЕРВАЯ КОСМИЧЕСКАЯ (КРУГОВАЯ)

$$mA_{\text{ц}} = F \quad m \frac{v^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2}$$

$$v_{1K} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$v_{1K} = \sqrt{gr}$$

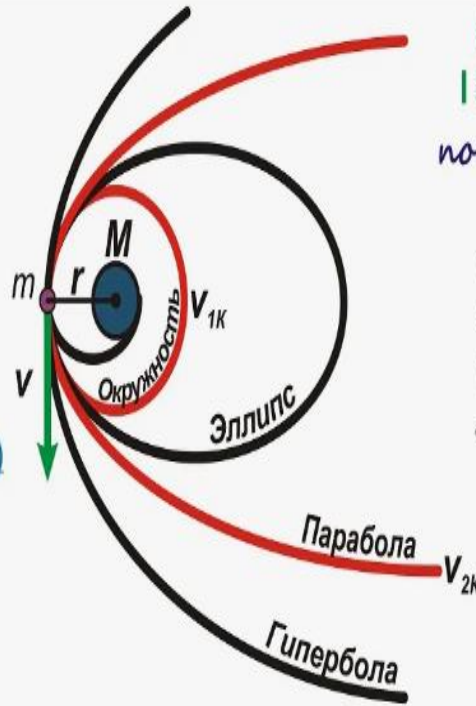
⊕ 7,9 км/с

ВТОРАЯ КОСМИЧЕСКАЯ (ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ)

$$KЭ + ПЭ = 0 \quad \frac{mv^2}{2} = G \frac{Mm}{r}$$

$$v_{2K} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

⊕ 11,2 км/с



ОБОБЩЁННЫЙ I ЗАКОН КЕПЛЕРА

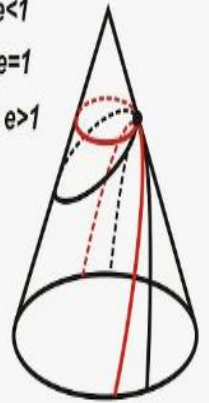
по коническим
сечениям

окружность $e=0$

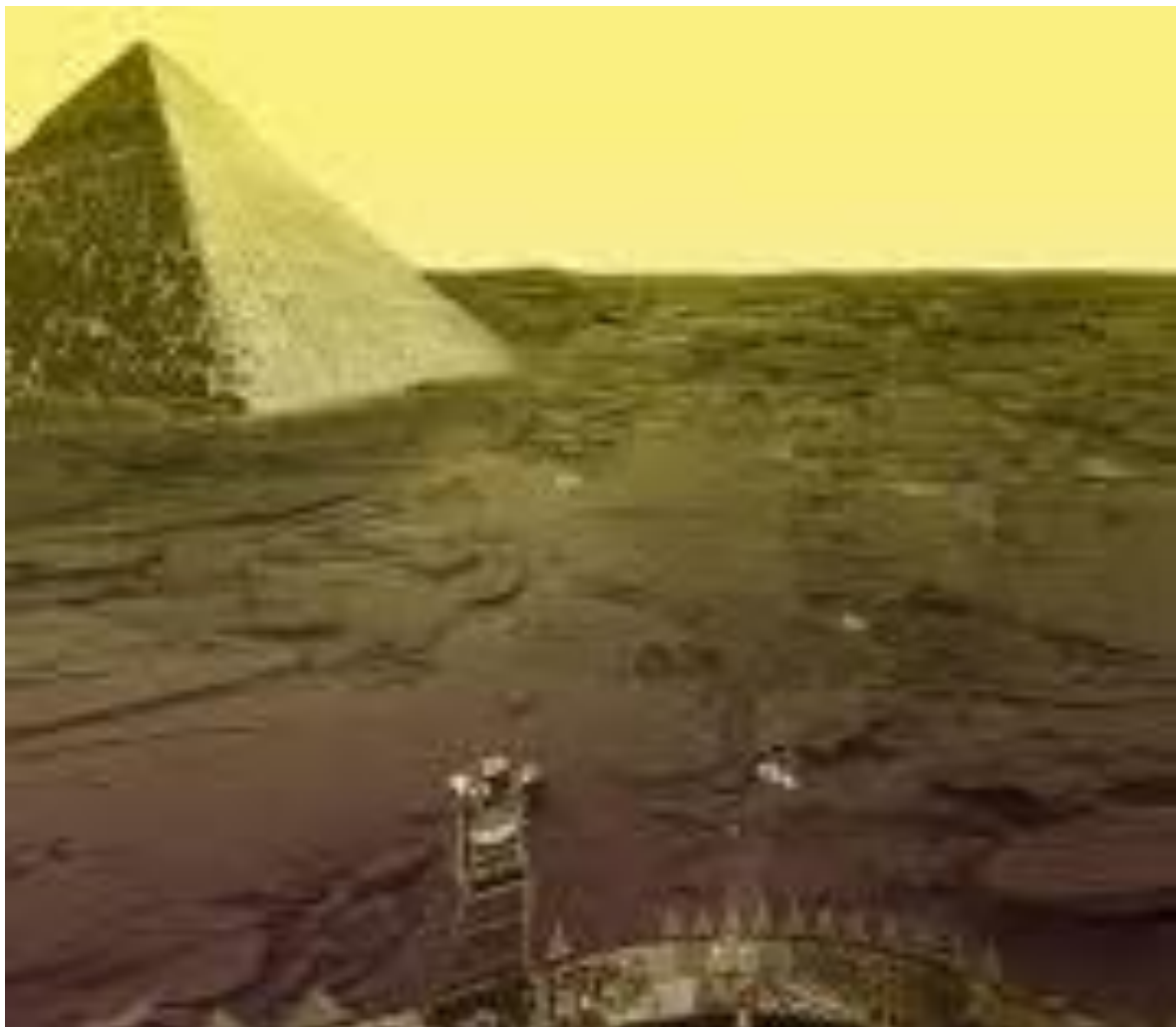
эллипс $0 < e < 1$

парабола $e=1$

гипербола $e > 1$



СНИМКИ ВЕНЕРЫ



Интегральное исчисление и Запас топлива

Одним из фундаментальных вопросов при запуске ракеты является определение нужного запаса топлива. Сложность заключается в том, что топливо расходуется по мере подъема и ускорения ракеты, и эти два параметра влияют друг на друга. Тут на помощь приходит интегральное исчисление.

Интегралы позволяют рассчитать, как изменяется расход топлива при различных скоростях и высотах, и как это влияет на общий запас топлива.



Формула Циолковского для определения
необходимого количества топлива для ракеты

ФОРМУЛА ЦИОЛКОВСКОГО

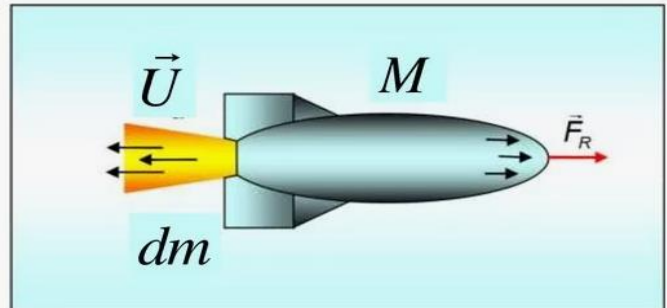
$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_R$$

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{U} \frac{dM}{dt} = -\vec{U} \left| \frac{dM}{dt} \right| = -\mu \vec{U}$$

$$M dv = -U dM \quad dv = -U \frac{dM}{M}$$

$$\int_{v_0}^{v_k} dv = -U \int_{M_0}^{M_K} \frac{dM}{M}$$

$$v_k = v_0 - U (\ln(M_K) - \ln(M_0))$$



$$v_k = v_0 - U \ln(M_0 / M_K)$$

21

Формула Циолковского

Практическая часть

задача 1.

- От Земли до Солнца приблизительно 150000000 км (1 а.е.). От Юпитера до Солнца 6,2 а.е. Какое расстояние от Юпитера до Солнца в км?

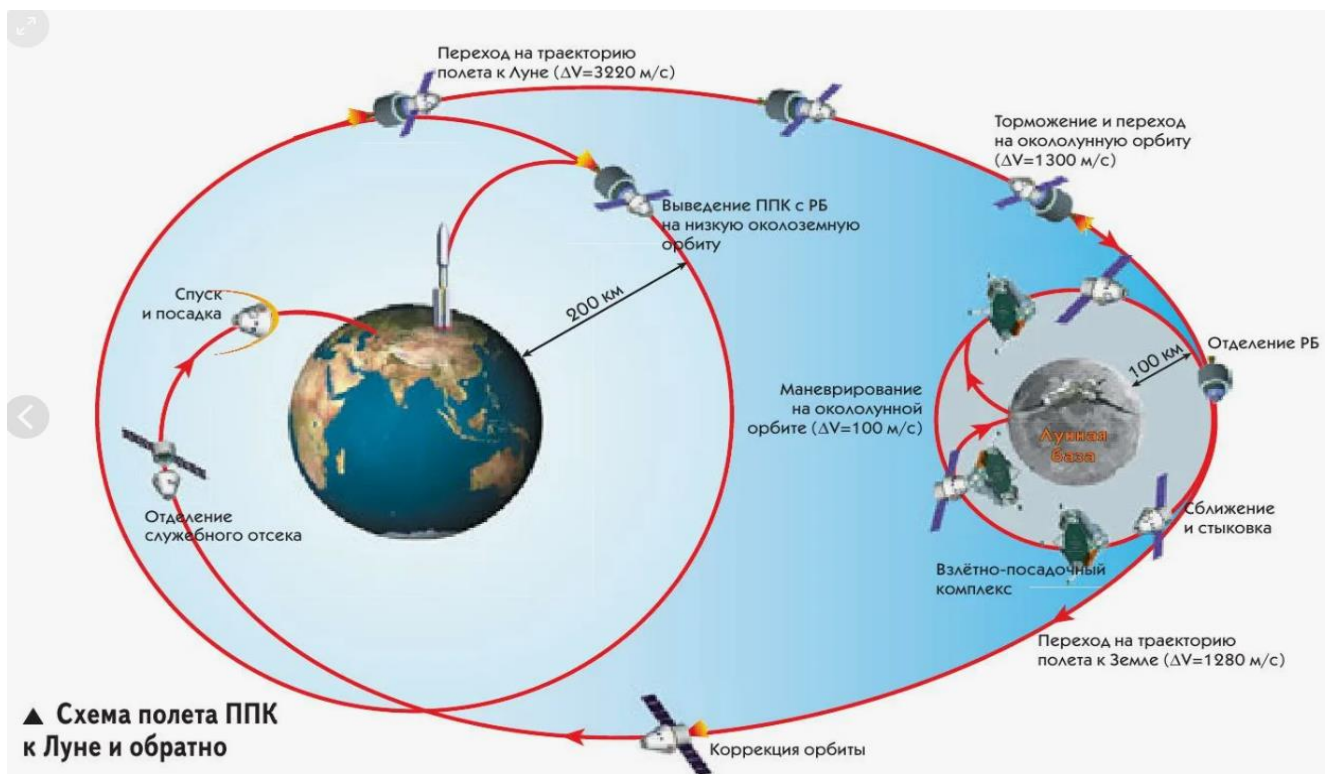


задача 2

- Комета Галлея сближалась с Солнцем и была видна с Земли 30 раз начиная с 240 г. до н.э. по 1986 год. Найти период обращения кометы вокруг Солнца, в каком году состоится 32 сближение кометы с Солнцем?

Ньютон вычислял форму
земного шара и показал, что
Земля имеет форму шара,
расширенного у экватора и
сплюснутого у полюсов.
Ньютон установил
"сплюснутость" Земли, не
выходя за дверь. Это открытие
было сделано "на кончике
пера" средствами математики.

СХЕМА ПОЛЕТА КОСМИЧЕСКОГО МОДУЛЯ К ЛУНЕ



Исходные данные для расчета:

- гравитационный параметр Земли $fM = 398600 \text{ км}^3/\text{с}^2$;
- средний радиус Земли $RE = 6371 \text{ км}$;
- высота начальной орбиты $H = 200 \text{ км}$;
- геоцентрическое расстояние Луны $a_0 = 384400 \text{ км}$;

Скорость аппарата на начальной круговой орбите:

$$v_n = \sqrt{\frac{fM}{r_p}} = \sqrt{\frac{398600}{6571}} = 7,788 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Скорость в перигее перелетного эллипса Земля-Луна:

$$v_p = \sqrt{\frac{fM}{a} \cdot \frac{1+e}{1-e}} = \sqrt{\frac{398600}{195524} \cdot \frac{1+0,966}{1-0,966}} = 10,92 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Максимальная продолжительность полета на Луну:

$$T_0 = \frac{\pi}{\sqrt{fM}} \left(\frac{r_p + r_a}{2} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{3,14}{\sqrt{398600}} \left(\frac{6571 + 384400}{2} \right)^{\frac{3}{2}} = 119,47 \text{ ч} \approx 5 \text{ суток}.$$

КАК МЫ ВИДИМ ЛУНУ С ЗЕМЛИ

